

短時間時系列データを対象とした 最適化計算による周波数分析法

白石 英孝

要 旨

短時間時系列データの正確な周波数分析を行うために、最適化計算を用いた新しい周波数分析法の検討を行った。

本法は、分析対象時系列データのフーリエ級数表現を目的関数として用い、これを最適化法のひとつであるDavidon-Fletcher-Powell法によって最小化することで、周波数分析を実行しようとするものである。

含まれる成分数、周波数、振幅の異なる多数のシミュレーションデータに本法を適用した結果、良好な精度で周波数分析を実行できることが確認された。

1 緒 言

最大エントロピー法(Maximum Entropy Method, 以下, MEM)は、短時間の時系列データを高分解能で周波数分析できる唯一の方法として、現在様々な分野でその適用が進められている。騒音振動解析の分野でも実稼動状態の機械の振動特性を解明するために、MEMが利用されはじめている¹⁾。

しかしながら、MEMは非常に高い周波数分解能を実現しうる反面、一般にスペクトルの分散(振幅)を正しく推定できないという、実用上重大な問題点を有している。さらに、パワースペクトルの導出過程で用いられる予測誤差フィルタの次数決定にあたり、最終予測誤差(Final Prediction Error, 以下, FPE)を次数決定の根拠に置くことができるとされているものの、FPEの最小値が不明確な時系列データでは次数が過大になり、真の卓越成分以外に実際には存在しない質の卓越成分が現れるという傾向を有している²⁾。

したがってMEM分析結果を利用する場合には、推定されたパワースペクトルが解析対象となる現象の物理的特性を正しく表現しているのかどうか、十分な検討を行う必要があり、分析結果をそのまま利用することは現状では困難であると考えられる。

本稿は以上のようなMEMの実用上の問題点を克服し、短時間データの高精度・高分解能周波数分析を行うための全く新しい分析法を提案するものである。

この方法は、時系列データのフーリエ級数表現を目的関数とし、その最小化を非線形最適化の一手法であるDavidon-Fletcher-Powell法(以下, DFP法)によって行うことで、高精度の周波数と正しい振幅を求めている。なおDFP法は反復解法のため初期値が必要となるが、ここではMEM分析結果のうちの周波数情報だけを初期値として用いることとした。

本法は非線形最適化法を主体とするため、MEMほどの汎用性は期待できないが、含まれる成分数、周波数、振幅の異なる多数のシミュレーションデータを用いて数値実験を行った結果、すべてのデータについて良好な精度で周波数及び振幅を同定することができ、また、今回用いた目的関数に対するDFP法の収束特性も実用上はほ妥当であろうとの結論が得られたので報告する。

2 基本概念

m個の周波数成分を含む時間信号 $T(t_i)$ は、離散化されたフーリエ級数及び誤差項 λ_i によって次のように表すことができる。

$$T(t_i) = \sum_{j=1}^m (A_{c_j} \cos \omega_j t_i + A_{s_j} \sin \omega_j t_i) + \lambda_i \quad (1)$$

ここで、 $T(t_i)$: 時刻 t_i における時間信号
 m : 時間信号に含まれる成分数
 ω_j : j 番目成分の角周波数
 A_{c_j} : " の振幅 (cosine項)
 A_{s_j} : " の振幅 (sine項)
 λ_1 : 誤差項

一般に周波数分析とは、式(1)に含まれる未知数 (ω_j , A_{c_j} , A_{s_j} , $j=1\sim m$) を決定する作業に相当するが、式(1)は非線形式であり、かつ測定時刻 (t_i) ごとに不規則に変動する誤差項が存在するために、解析的に解くことは不可能である。そのため、最小2乗法と同様な考え方にに基づき、測定時間全体に含まれる全誤差が最小となるように ω_j , A_{c_j} , A_{s_j} , ($j=1\sim m$) を決定し、当該時間信号を式(1)で表現するための最適値を求めることになる。ただし式(1)は ω_j を非線形に含む形となっており、通常最小2乗法を用いることができないため、誤差項に着目して次のような式の展開を行う。式(1)を λ_1 について解くと次式が得られる。

$$\lambda_1 = T(t_i) - \sum_{j=1}^m (A_{c_j} \cos \omega_j t_i + A_{s_j} \sin \omega_j t_i) \quad (2)$$

式(2)の両辺を2乗し、測定時間内全体の和をとると、次の2乗誤差関数が得られる。

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_1^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ T(t_i) - \sum_{j=1}^m (A_{c_j} \cos \omega_j t_i + A_{s_j} \sin \omega_j t_i) \right\}^2 \quad (3)$$

ここで、 λ : 時間信号に含まれる全誤差の2乗和 (2乗誤差関数)

n : 時間信号のデータ数

この λ を最小化するような角周波数 ω_j と振幅 A_{c_j} , A_{s_j} が求められれば、それらが時間信号を式(1)で表現する際の最適値となる。

式(3)を最小化する問題は、非線形最適化問題に相当し、様々な解法が存在するが、本稿では現在最も広く利用されているDFP法を用いることとした。したがってDFP法の目的関数は式(3)となる。

DFP法を実行する際には、反復計算を行うための周波数及び振幅の初期値を決定する必要がある。ところが、現在、短時間時系列データの周波数情報を精度よく抽出できるのはMEMだけのため、本稿ではMEM分析結果の周波数情報を周波数 (ω_j) の初期値として採用した。また、振幅 (A_{c_j} , A_{s_j}) の初期値はMEM分析結果から得られた周波数初期値と、分析対象時系列データを用いた最小2乗法によって決定することと

した。

本法で用いるMEM及びDFP法については、すでに時系列解析、最適化法、数値計算等の多くの書籍に、理論の詳細や計算方法が示されているため、本稿では両者の概要を付録に示すにとどめる。詳細については参考書等³⁾を参照されたい。

なお、式(1)は、成分数 m を無限大にとれば近似的には過渡的非周期信号なども表現することができる。しかしながら、本稿ではDFP法によって目的関数 (式(3)) の最小化を行うため、実際には m を無限大にすることは不可能であり、また、 m の値が極端に大きい場合でも計算は困難になるものと推測される。そのため本法を適用できる時系列データは、周期的もしくは概周期的性質が強く、比較的少数の成分を含むものに限られると考えられる。

3 解析方法

本稿では短時間時系列データとして、最高分析周波数100Hz、サンプル点数1024点、データ時間長4秒の時系列データのうちの、1秒間 (サンプル点数256点) の部分に解析対象信号が含まれている場合を想定し、データの作成及び解析を実施した。

図1は解析方法の流れを示したものであるが、以下、この図に従って具体的な内容について述べる。

3・1 データの作成

ここでは実際の周波数分析を想定し、成分数、周波

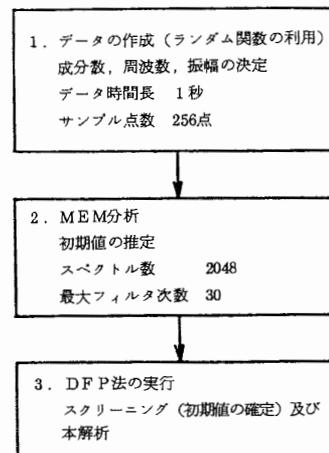


図1 解析方法

数、振幅の異なる多数の時系列データを解析的に作成した。その際、解析者に成分数等の事前情報が得られないように、データはすべてランダム関数によって作成し、コンピュータのディスク上に収めることとした。このような方法を用いたのは、MEMではフィルタ次数が過大であると、時系列データに実際に含まれている成分数よりも多くの卓越成分が現れるため、この中からDFP法のための周波数初期値を決定しなければならないこと、またDFP法のような反復計算を行う方法の場合、初期値の選択が解の収束に影響を及ぼすことが予想されること等の理由により、MEM分析結果から初期値を確定する際に、解析者の恣意的な判断が働くのを避けるためである。

成分数、振幅は次のような範囲の値とした。

- (1) 成分数 ($m \leq 10$)
- (2) 振幅 ($0.1 < \text{Amp.} < 100$)

すなわち、成分数については2章で述べたようにDFP法が多数の変数を処理しきれないと予想されるために一応の値として成分数10以下との制限を設けている。また振幅については、実際の周波数分析においてその強度が問題となるような卓越成分は、60dB(振幅パワーのレベル換算値)程度の範囲を設定すれば、この中に十分含まれるであろうとの判断により、最小値から最大値まで約1000倍の範囲を設けている。

以上の方法により成分数1~10の時系列データをそれぞれ10個ずつ計100個作成し解析を実施した。

3・2 MEM分析

ここでは、DFP法の初期値として用いるために、時系列データ中の周波数情報の抽出を行っている。MEMの分析結果にはすでに1章で述べたように、フィルタ次数の適、不適により実際に存在する卓越成分(以下、真の卓越成分)と実際には存在しない卓越成分(以下、贋の卓越成分)の2通りが含まれることになる。

この段階では、両者を識別する合理的根拠が存在しないため、MEM分析結果に現れるすべての卓越成分をDFP法の初期値として採用することになる。ただし、一般には贋の卓越成分は真の卓越成分のごく近傍に出現するため、実用上は一群の卓越成分の中から2、3の成分を適宜選択することで、初期値の数をある程度減らすことが可能であると考えられる。

なお、MEMの分析条件としてスペクトル数2048、最大フィルタ次数30としている。

3・3 DFP法

DFP法の実行過程は便宜的には、スクリーニングと本解析に分けることができる。スクリーニングとは、MEM分析結果(真の卓越成分と贋の卓越成分を含む、以下、推定初期値)から真の卓越成分を選び出す作業に相当する(選び出された初期値を以下、確定初期値と呼ぶ)。これは、すべての推定初期値をDFP法のプログラムに入力し、反復過程における各成分の振幅値の推移状況から、振幅値が0に収束すると考えられる成分を除外するもので、振幅値0とは当該成分が実際には時系列データに含まれていない、贋の卓越成分に相当することを意味している。なおこの段階のまま反復計算を継続しても最終的には真の卓越成分の周波数及び振幅値を得ることが、一応可能であると考えられる。しかしながら、贋の卓越成分によって変数の数が増えるため、反復計算に要する時間が増大すること、また贋の卓越成分の振幅値は成分ごとに順次微小値に収束する傾向をもつため、すべての贋の卓越成分の振幅が微小値となるまでには、多数回の反復が必要となり、計算時間が増大することなどから、実際には振幅値の推移を観察しながら、その都度微小振幅成分を除外して計算を進めるのが、計算時間の面では有利であると考えられる。

スクリーニングにより推定初期値から贋の卓越成分を除外し、確定初期値を得た段階でDFP法を実行するのが本解析であり、解が収束すれば、それが周波数及び振幅の最適値となる。

4 解析結果及び考察

本章ではまず、本法によって実際に正確な周波数分析が可能であることを、一連の解析作業の流れに沿って例示し、その後シミュレーションデータ全体の解析結果から、本法で用いた目的関数に対するDFP法の収束特性(変数の数と反復回数との関係)について示すこととする。

4・1 解析例

まず表1に示す周波数及び振幅をもった時系列データの1秒間分(最高分析周波数100 Hz、サンプル点数1024点、データ時間長4秒のうちの1/4時間長分256点)をサンプリングし、MEM分析を実行した。

表2はMEM分析結果を示したものである。ここではFPEが最小値となるフィルタ次数(=23)を用い

表1 解析データ例

No.	周波数 〔Hz〕	振 幅	
		COSINE 項	SINE 項
1	6.6923	5.8402×10^1	2.4646×10^1
2	19.601	2.4409	9.7542×10^{-1}
3	22.324	3.1297×10^1	3.5162×10^1

表2 MEM分析結果

No.	周波数	パワースペクトル値
1	5.9814	1.2743×10^5
2	6.3200	1.5978×10^7
3	6.6585	9.8739×10^5
4	19.668	1.5360×10^3
5	20.055	2.4865×10^3
6	20.926	1.4217×10^2
7	22.328	6.5920×10^4

表3 DFP法によるスクリーニング (反復52回)

No	周波数 〔Hz〕	振 幅	
		COSINE 項	SINE 項
1	5.9861	1.0090×10^{-3}	1.6776×10^{-4}
2	6.3309	-8.4868×10^{-3}	5.1973×10^{-3}
3	6.6922	5.8414×10^1	2.4638×10^1
4	19.601	2.4419	9.7700×10^{-1}
5	20.048	-7.1352×10^{-4}	-1.5187×10^{-3}
6	20.923	-4.5172×10^{-4}	-7.0891×10^{-4}
7	22.324	3.1298×10^1	3.5162×10^1

ているのにもかかわらず、実際の成分数を上回る7つの卓越成分が得られている。この段階では周波数成分がNo.1~3, No.4~6, No.7の3つのグループに別れるものと推測することもできるが、近接する成分が存在する可能性もあり、客観的には分析対象時系列データが7つの成分を含んでいるものと判断せざるを得ない。

表3はMEM分析結果のすべての周波数情報をDFP法の初期値として入力し、最小2乗法による振幅初期値の決定を行った後に、解の収束状況を調べた結果である。表3からNo.3, 4, 7の成分と比較してNo.1, 2, 5, 6の成分の振幅が極めて小さな値となっており、後者の成分が眞の卓越成分に相当するものと判断される。ここでは例示の都合上眞の卓越成分と考えられるものの振幅すべてが、眞の卓越成分の振幅の1/1000~

1/10000となった段階で計算を打ち切って示しているため、成分数7で52回もの反復計算を必要とする結果になっている。しかしながら、眞の卓越成分の振幅値は、実際には3・3節で述べたように順次微小な値に収束していくため、その都度、微小振幅成分を初期値から除外して計算を行うことで、スクリーニングに要する時間を短縮することが可能である。

なお、収束条件を周波数が有効数字5桁まで正解値(表1)と一致することとした場合、表3の計算を続行すると反復100回でも解は収束せず(有効数字4桁までが一致)、一方表3のNo.3, 4, 7の周波数だけを用いて改めてDFP法を実行すると反復2回で解は収束した。したがって、DFP法において不必要な初期値を除外する作業は計算時間を短縮する上でも必要不可欠であると考えられる。

以上の解析例で示した作業を、100個のシミュレーションデータに対して適用した結果、すべて正解値と一致する解が得られ、本法によって正確な周波数分析を実行しうることが確認された。

4・2 収束特性

反復計算によって解を求める場合、最も関心が払われるのは収束の早さであり、言い換えれば、実用上許容できる反復回数で解が収束するののかという問題である。本稿では、DFP法を周波数分析に適用しているため、式(3)に示したような変数 ω_i が正弦関数及び余弦関数内に含まれる極めて非線形性の強い目的関数を用いている。そこで、このような特殊な形状の目的関数に対してDFP法がどのような収束特性を示すのかを調べるために、収束特性に最も強く影響を及ぼすと考えられる変数の数と反復回数との関係について、シミュレーションデータの解析結果を用いて検討を行った。

なお本法では、1つの成分を表現するのに周波数、振幅(cosine項, sine項)の3つの変数が必要となるため、変数の数は成分数の3倍となる。

図2に変数の数と平均反復回数との関係を示す。

DFP法では、目的関数が変数の2次形式として表現される場合には、たかだか変数の数に等しい反復回数で解が収束すると言われている(2次形式的収束)。図中の直線はその場合の変数の数と反復回数との関係を示したものである。これと解析結果の平均反復回数とを比較すると、後者のほうが平均反復回数は大きくなっていることがわかる。これはDFP法に用いた目的関数が2次形式とは異なる非線形性の強いものである。

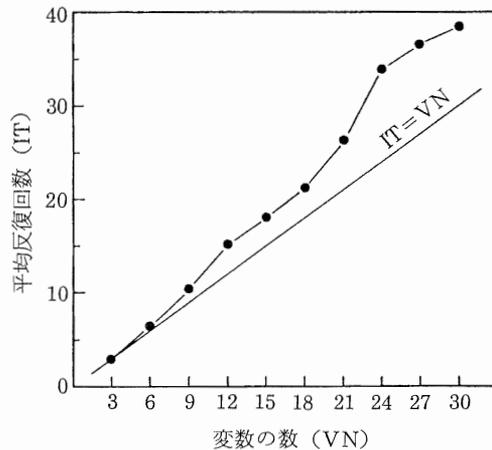


図2 変数の数と平均反復回数との関係

ったために現れた傾向であると考えられる。ただし、解析結果の場合でも、変数の数と平均反復回数との間にはほぼ比例関係がみられる。このような比例関係は、変数の数が若干増加したとしても、反復回数の増加量は比較的少なく済むことを意味している。

以上の結果から明らかなように、DFP法は、本法のような非線形性の強い目的関数を用いる場合でも、比較的少ない反復回数で解を求めることができ、本法に用いるには有効な方法であるといえよう。

5 結 言

本稿は、従来MEMでしか実行することのできなかった短時間時系列データの周波数分析を、MEMとは全く異なる最適化計算によって実行しうることを示したものである。ここで用いた方法は非線形最適化法のもつ種々の制約（たとえば、あまり多くの変数は処理できない、反復計算を行うために計算時間がかかる等）を受け、MEMと比較すれば汎用性の乏しいものとなっている。しかしながら、今日様々な分野でMEMが利用されつつあるとはいえ、なお、周波数及び振幅の決定に多くの検討を必要としていることを考えあわせれば、本法のようにほぼ機械的な計算で正確な周波数及び振幅を決定できるような分析方法は、特定条件下（解析対象に含まれる卓越成分数が少なく、かつ周期的もしくは概周期的性質が強い）にある時系列データに対しては極めて有効な方法であるといえよう。

今後は、解析対象データに不規則雑音が混入した場合等についても検討を行い本法の実用化を図っていく

必要があると考えられる。

文 献

- 1) MCAE技術の新たなる展開, SDRC技術セミナー資料, 1989.
- 2) 日野幹雄: スペクトル解析, 朝倉書店, 1977.
- 3) MEMについては2)以外にたとえば,
青木由直: BASIC数値計算法, コロナ社, 1984.
DFP法については、たとえば,
渡部力他: Fortran77による数値計算ソフトウェア, 丸善株式会社, 1989.
L. C. W. ディクソン: 非線形最適化計算法, 培風館, 1974.
J. コワリック他: 非線形最適化問題, 培風館, 1970.
両者を扱ったものとしては,
南茂夫: 科学計測のための波形データ処理, CQ出版社, 1986.

付録 MEM及びDFP法の概要^{2),3)}

1・1 MEM

MEMの理論展開は、情報エントロピーの概念に基礎を置いたものと予測誤差フィルタの考え方を基本にしたものの2つがあげられる。ここでは後者についてその概要を示す。

まず式(A1)のような再帰型フィルタの自己回帰過程を考える。

$$x_1 = -\sum_{k=1}^m a_{m,k} x_{1-k} + \varepsilon_1 \quad (\text{A1})$$

ここで、 x_1, x_{1-k} : 時系列信号
 m : フィルタ次数
 $a_{m,k}$: フィルタ係数
 ε_1 : 定常白色雑音

式(A1)の両辺に x_1 を乗じて期待値をとると式(A2)が得られる。

$$\begin{aligned} C_0 &= E\{x_1^2\} \\ &= -\sum_{k=1}^m a_{m,k} E\{x_1 x_{1-k}\} + E\{x_1 \varepsilon_1\} \\ &= -\sum_{k=1}^m a_{m,k} C_k + E\{\varepsilon_1^2\} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

ここで、 C_k : 時系列信号の自己相関関数
 同様に式(A1)の両辺に x_{1-1}, x_{1-2}, \dots ,

x_{1-m} を乗じて期待値をとり行列の形でまとめると式 (A3) が得られる。

$$\begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_m \\ C_1 & C_0 & \cdots & C_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_m & C_{m-1} & \cdots & C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{m,1} \\ \vdots \\ a_{m,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A3)$$

ここで、 P_m : 定常白色雑音の分散 ($=E\{\varepsilon_1^2\}$)

一方、Wiener-Khinchineの公式によりパワースペクトルは式 (A4) で与えられる。

$$S(\omega) = \frac{P_m \Delta t}{|1 + \sum_{i=1}^m a_{m,i} \exp(-j\omega_i \Delta t)|^2} \quad (A4)$$

ここで、 $S(\omega)$: 角周波数 ω のパワースペクトル

Δt : データのサンプリング間隔

したがって、式 (A3) を解いてフィルタ係数 $a_{m,k}$ ($k=1, 2, \dots, m$) 及び定常白色雑音の分散 P_m を求めることによりパワースペクトル (式 (A4)) が得られる。

式 (A3) を解く方法としては Yule-Walker 法及び Burg 法があげられるが、いずれにせよフィルタ次数 m 及び定常白色雑音の分散 P_m を決定する必要がある。

MEM ではフィルタ次数 m の良否が結果に重大な影響を及ぼすが、現在では次数決定の目安として FPE が広く用いられている。FPE とは時系列信号 x_1 からフィルタ次数 m で推定したフィルタ係数 $a_{m,i}$ に対して式 (A5) で定義される値であり、FPE が最小となる m をフィルタ次数として採用する。

$$FPE = \frac{N + (m+1)}{N - (m+1)} S_m^2 \quad (A5)$$

$$S_m^2 = \sum_{i=m+1}^N (x_i + \sum_{k=1}^m a_{m,k} x_{i-k})^2$$

また、定常白色雑音の分散 P_m は次の漸化式で与えられる。

$$P_m = P_{m-1} (1 - a_{m,m}^2) \quad (A6)$$

$$P_0 = \sum_{i=1}^n x_i^2 / n$$

MEM では以上のような方法により、短時間時系列データの高分解能周波数分析を実現しているが、その反面、1章で述べたような欠点も具備する結果となっている。そこで本稿では、MEM 分析結果のうち叢の卓越成分が含まれる可能性はあるものの比較的確度の高い周波数情報だけを、次に述べる DFP 法の初期値として利用している。

1・2 DFP法

目的関数 $F(x)$ が最小点の近傍 x_0 において解ベクトル $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^t$ に関する2次関数で表わされるならば、 $F(x)$ の最小値を与える x_{min} は式 (A7) によって与えられる。

$$x_{min} = x_0 - G^{-1} g$$

$$\begin{cases} G_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(x) \\ g_i = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x) \end{cases} \quad (A7)$$

したがって目的関数 $F(x)$ から G^{-1} を解析的に、もしくは数値微分によって求めれば、反復計算を行うことで x_{min} を算出することが可能となる。この方法は Newton-Raphson 法と呼ばれるが、反復ごとに G^{-1} の計算が必要になり、数値的に不安定であるとともに変数の増加により計算量が急激に増大する等の問題を有している。こうした欠点を補うために、 G^{-1} の直接計算を避け、反復計算によって G^{-1} に収束するような行列 H_k を求めているのが DFP 法である。

DFP 法の計算手順は概ね次のようになる。

- (1) $H_0 = I$ (単位行列)
- (2) k 回目の反復で得られた解ベクトル x_k における勾配 g_k を計算する。
- (3) $d_k = -H_{k-1} g_k$ を求める。
- (4) $F(x_k + \lambda d_k)$ が最小となるような λ の値を直接探索法によって求める。
- (5) $x_{k+1} = x_k + \lambda d_k$ とし、 x_{k+1} における勾配 g_{k+1} を求めて次式から y_k を算出する。

$$y_k = g_{k+1} - g_k \quad (A8)$$

- (6) 式 (A9) を計算する。

$$H_k = H_{k-1} + \lambda_k \frac{d_k d_k^t}{g_k^t H_{k-1} g_k} - \frac{H_{k-1} y_k y_k^t H_{k-1}}{y_k^t H_{k-1} y_k} \quad (A9)$$

- (7) (3)に戻り、解が収束するまで反復を繰り返す。